

2次関数の問題へのアプローチ



問題

方程式 $x^2 + (2-a)x + 4-2a = 0 \cdots \cdots (*)$ が $-1 < x < 1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答 $f(x) = x^2 + (2-a)x + 4-2a$ とし、2 次方程式 $f(x) = 0$ の判別式を D とする。

$y = f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で、その軸は直線 $x = \frac{a-2}{2}$ である。

[1] 2 つの解がともに $-1 < x < 1$ の範囲にあるための条件は、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸の $-1 < x < 1$ の部分と共有点をもつ、即ち次の (i) ~ (iv) が同時に成り立つことである。

(i) $D \geq 0$ (ii) 軸が $-1 < x < 1$ の範囲にある

(iii) $f(-1) > 0$ (iv) $f(1) > 0$

(i) $D = (2-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4-2a) = a^2 + 4a - 12 = (a+6)(a-2)$

$D \geq 0$ から $(a+6)(a-2) \geq 0$ ゆえに $a \leq -6, 2 \leq a \cdots \cdots ①$

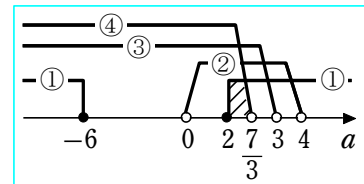
(ii) 軸 $x = \frac{a-2}{2}$ について $-1 < \frac{a-2}{2} < 1$, ゆえに $0 < a < 4 \cdots \cdots ②$

(iii) $f(-1) = -a + 3$ であるから $-a + 3 > 0$ よって $a < 3 \cdots \cdots ③$

(iv) $f(1) = -3a + 7$ であるから $-3a + 7 > 0$

よって $a < \frac{7}{3} \cdots \cdots ④$

① ~ ④ の共通範囲を求めて $2 \leq a < \frac{7}{3}$



[2] 解の 1 つが $-1 < x < 1$ にあり、他の解が $x < -1$ または $1 < x$ にあるための条件は

$$f(-1)f(1) < 0 \Leftrightarrow (-a+3)(-3a+7) < 0 \Leftrightarrow (a-3)(3a-7) < 0 \Leftrightarrow \frac{7}{3} < a < 3$$

[3] 解の 1 つが $x = -1$ のとき $f(-1) = 0$ から $-a + 3 = 0$, ゆえに $a = 3$

(*) は $x^2 - x - 2 = 0$, 他の解が $x = 2$ となり、 $-1 < x < 1$ の範囲に解をもたず、不適。

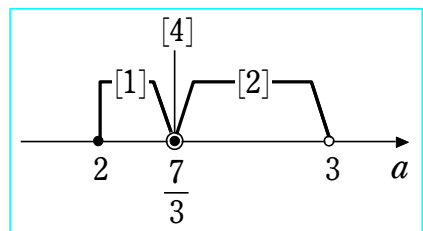
[4] 解の 1 つが $x = 1$ のとき $f(1) = 0$ から $-3a + 7 = 0$, ゆえに $a = \frac{7}{3}$

(*) は $3x^2 - x - 2 = 0$, 他の解は $x = -\frac{2}{3}$ となり、

条件を満たす。

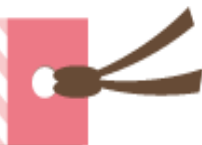
求める a の値の範囲は、[1], [2], [4] の結果を合わせて

$$2 \leq a < 3 \quad \text{答}$$



解説 この問題は「2 次方程式の解の存在範囲」の問題で、2 次関数のグラフを念頭に置きながら解いていく「数学 I」定番の問題である。それに対して、「数学 II」,「数学 III」の範囲まで拡張して解いたらどうなるかを探究した。**別解 2** が「数学 II」範囲, **別解 1** が「数学 III」範囲まで拡張して解いたものである。定数 a の値の範囲の意味がよくわかる。

山脇の超数学講座 No. 62



別解 1 与えられた方程式(*)を変形して, $a(x+2)=x^2+2x+4 \dots (**)$ とする。
 $x=-2$ とすると, 左辺 $=0$, 右辺 $=4$ となり, 矛盾する。よって, $x+2 \neq 0$

そこで, (**) の両辺を $x+2$ で割って, $a = \frac{x^2+2x+4}{x+2} = x + \frac{4}{x+2}$ として,

$\begin{cases} y=a \\ y=x + \frac{4}{x+2} = f(x) \end{cases}$ と置く。 の両グラフが, $-1 < x < 1$ の範囲で,
 共有点をもつような a の範囲を求めればよい。

$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0$ とすると, $x = -4, 0$

x	...	-4	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	/	-	0	+
$f(x)$	↗	-6	↘	/	↘	2	↗

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - x\} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x+2} = 0$ より,

漸近線は, 直線 $y=x$, 加えて 直線 $x=-2$

極大値は, $x=-4$ のときで -6 ,

極小値は, $x=0$ のときで 2 ,

よって, $-1 < x < 1$ における $y=f(x)$

のグラフは, 図 1 のようになる。

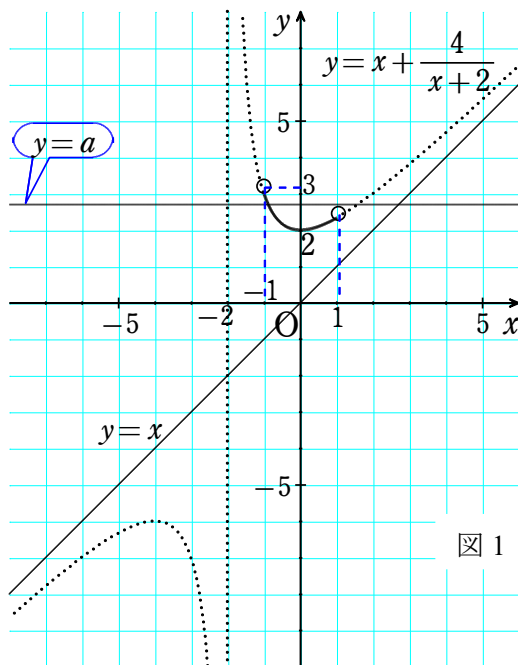
$f(-1)=3, f(1)=\frac{7}{3}$ であり,

増減表とグラフより, $-1 < x < 1$ における

$f(x)$ の値域は, $2 \leq f(x) < 3$

したがって, 直線 $y=a$ と曲線 $y=f(x)$ が共有点をもつような定数 a の値の範囲は,

$2 \leq a < 3$ 答



別解 2 (「 $f(x)$ と置く」ところまでは **別解 1** と同じ)

$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+2} - 2$ と式変形すると, $-1 < x < 1$ において, $x+2 > 0$ だから,

相加平均と相乗平均の関係より, $f(x) \geq 2\sqrt{(x+2) \cdot \frac{4}{x+2}} - 2 = 4 - 2 = 2$ (等号は $x=0$ のとき)

$f(-1)=3, f(1)=\frac{7}{3}$ であり, $-1 < x < 1$ で $f(x)$ は連続して変化するので, 最小値は 2 であり,

値域は $2 \leq f(x) < 3$ となる。したがって $2 \leq a < 3$ であれば, 方程式 (**) は少なくとも 1 つの実数解をもつ。